

Fähigkeiten

Für das Abitur sollten Sie folgende können:

- Zu zwei gegebenen Richtungsvektoren einen Normalenvektor ermitteln.
- Aus drei Punkten eine Ebenengleichung ermitteln, egal in welcher Form.
- Die Parameterform in eine Koordinatenform oder in eine Normalenform umwandeln.
- Die Hesse'sche Normalenform aufstellen.

Aufgabe 1

Liegen die Punkte $A(1|1|1)$, $B(0|2|0)$, $C(1|2|-2)$ und $D(4|5|-17)$ in einer Ebene?

Lösung:

Wir bestimmen zunächst die Richtungsvektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AC}$.

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ und } \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Lösung - Aufgabe 1

Aus den beiden Richtungsvektoren bestimmen wir nun mit dem Vektorprodukt einen Normalenvektor.

$$\begin{array}{ccc} \overline{1} & \overline{0} & \\ 1 & 1 & \\ -1 & -3 & \\ -1 & 0 & \\ 1 & 1 & \\ \overline{1} & \overline{3} & \end{array}$$

$$\vec{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 1 \cdot (-3) \\ (-1) \cdot 0 \\ (-1) \cdot 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} (-1) \cdot 1 \\ (-1) \cdot (-3) \\ 1 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Lösung - Aufgabe 1

Wir multiplizieren $\vec{n}$ noch mit -1 . Dadurch werden wir die lästigen Vorzeichen los und das neue $\vec{n}$ steht immer noch senkrecht zu den Richtungsvektoren, da sich ja nun lediglich die Richtung des alten $\vec{n}$ umgedreht hat.

Wir haben also $\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ als Normalenvektor.

Daraus ergibt sich die noch unvollständige Koordinatenform

$$E: 2x_1 + 3x_2 + x_3 = d$$

Lösung - Aufgabe 1

Durch Einsetzen von $A(1|1|1)$ erhalten wir $d = 6$.

Somit haben wir $E: 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 6$.

Nun setzen wir der Reihe nach die restlichen Punkte $B(0|2|0)$, $C(1|2|-2)$ und $D(4|5|-17)$ ein und prüfen, ob die Gleichung jeweils erfüllt wird.

$$B(0|2|0): 2 \cdot 0 + 3 \cdot 2 + 0 = 6 \Rightarrow \text{OK!}$$

$$C(1|2|-2): 2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + (-2) = 6 \Rightarrow \text{OK!}$$

$$D(4|5|-17): 2 \cdot 4 + 3 \cdot 5 + (-17) = 6 \Rightarrow \text{OK!}$$

Ergebnis: Alle Punkte liegen in derselben Ebene!

Aufgabe 2

Wandle die Parameterform $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}$

zunächst in die Normalenform und anschließend in die Koordinatenform um.

Liegen die Punkte $P(-1|-10|-10)$ und $Q(-1|29|6)$ in E ?

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Lösung - Aufgabe 2

Wir bilden aus den beiden Spannvektoren (auch Richtungsvektoren genannt) mit dem Vektorprodukt zuerst einen Normalenvektor.

$$\begin{array}{cc} \hline 1 & 2 \\ -2 & 5 \\ 3 & 7 \\ 1 & 2 \\ -2 & 5 \\ \hline 3 & 7 \end{array}$$

$$\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} -2 \cdot 7 \\ 3 \cdot 2 \\ 1 \cdot 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \cdot 5 \\ 1 \cdot 7 \\ -2 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -29 \\ -1 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Lösung - Aufgabe 2

Der Einfachheit halbe multiplizieren wir mit -1 , wodurch sich die Eigenschaft ein Normalenvektor zu sein nicht ändert.

Wir erhalten $\vec{n} = \begin{pmatrix} 29 \\ 1 \\ -9 \end{pmatrix}$ als neuen Normalenvektor.

Mit dem Stützvektor $\vec{p} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ aus der Parameterform ergibt sich daraus die **Normalenform**:

$$E: \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} 29 \\ 1 \\ -9 \end{pmatrix} = 0$$

Lösung - Aufgabe 2

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 29 \\ 1 \\ -9 \end{pmatrix}$$

Die Koordinatenform kann man auf zwei Wegen erhalten.

Methode 1: Ausmultiplizieren der Normalenform

$$\left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} 29 \\ 1 \\ -9 \end{pmatrix} = 0 \iff \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 29 \\ 1 \\ -9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 29 \\ 1 \\ -9 \end{pmatrix} = 0$$

$$\iff \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 29 \\ 1 \\ -9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 29 \\ 1 \\ -9 \end{pmatrix}$$

$$\iff 29x_1 + x_2 - 9x_3 = 2 \cdot 29 + 2 \cdot 1 - 1 \cdot 9 = 51$$

Ergebnis: Die Koordinatenform lautet $E: 29x_1 + x_2 - 9x_3 = 51$

Lösung - Aufgabe 2

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 29 \\ 1 \\ -9 \end{pmatrix}, \vec{p} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Methode 2:

Der Normalenvektor liefert folgenden Ansatz $29x_1 + x_2 - 9x_3 = d$.

Das noch unbekannte d bestimmt man, in dem man einen Punkt einsetzt, der in der Ebene liegt, z.B. den Punkt, der durch den Stützvektor beschrieben wird.

Einsetzen des Stützvektors liefert $29 \cdot 2 + 2 - 9 \cdot 1 = 51 = d$.

Diese Methode erscheint uns am einfachsten!

Ergebnis: Die Koordinatenform lautet $E: 29x_1 + x_2 - 9x_3 = 51$

Aufgabe 3

Die Punkte $A(0|0|0)$ und $C(4|8|0)$ sind Eckpunkte eines Quaders mit der Höhe $h = 5 \text{ LE}$.

- a) Bestimme die restlichen Eckpunkte.
- b) Ermittle eine Parameterform der Ebene, in der die Punkte A , C und G liegen. Ermitteln Sie weiterhin eine Normalenform, die Hesse'sche Normalenform und die Koordinatenform.
- c) Zeichne den Quader in ein Koordinatensystem und berechne dessen Volumen.

Lösung - Aufgabe 3

a) und c)

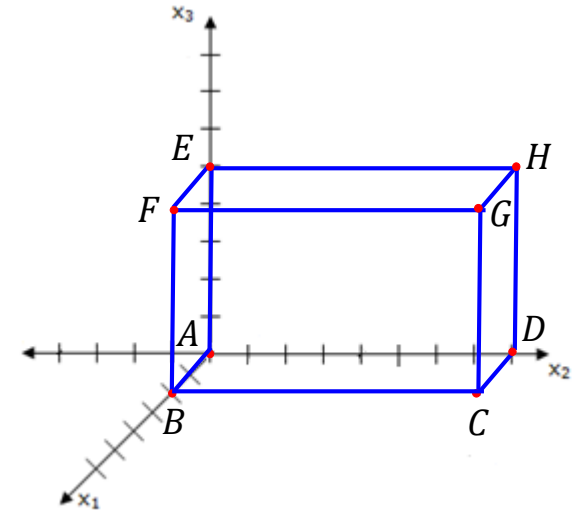
Die restlichen Eckpunkte sind $B(4|0|0)$, $D(0|8|0)$, $E(0|0|5)$, $F(4|0|5)$, $G(4|8|5)$ und $H(0|8|5)$.

An den Koordinaten kann man die Längen des Quaders ablesen:

$$|\overrightarrow{AB}| = 4, |\overrightarrow{BC}| = 8 \text{ und } h = 5 \text{ (war vorgegeben)}$$

Damit ergibt sich das Volumen des Quaders mit

$$\underline{V = 4 \cdot 8 \cdot 5 = 160 \text{ LE}^3}$$



Lösung - Aufgabe 3 b)

Parameterform für E :

Aus den Punkten A , C und G ergeben sich die

Richtungsvektoren $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{AG} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Wenn wir den Ortsvektor zum Punkt A als Stützvektor verwenden, erhalten wir sofort eine Parameterform für E .

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 5 \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 5 \end{pmatrix}; \quad s, t \in \mathbb{R}$$

Lösung - Aufgabe 3 b)

Normalenform für E :

Aus den Richtungsvektoren $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{AG} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 5 \end{pmatrix}$ ergibt sich mit dem Vektorprodukt zunächst ein Normalenvektor.

4	4
8	8
0	5
4	4
8	8
0	5

$$\vec{n} = \overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AG} = \begin{pmatrix} 40 \\ 0 \\ 32 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 20 \\ 32 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40 \\ -20 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Lösung - Aufgabe 3 b)

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 40 \\ -20 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Da es bei einem Normalenvektor nicht auf die Länge ankommt, teilen wir durch 20 und erhalten $\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Mit dem Nullvektor als Stützvektor ergibt sich daraus die Normalenform für E :

$$E: \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \text{ bzw. einfacher}$$

$$E: \vec{x} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

Lösung - Aufgabe 3 b)

Koordinatenform für E :

Mit dem Normalenvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ergibt sich auch gleich die Koordinatenform mit $2x_1 - x_2 + 0x_3 = d$.

Da der Ursprung in E liegt erhalten wir durch Einsetzen die Koordinatenform komplett:

$$\underline{E: 2x_1 - x_2 = 0}$$

Lösung - Aufgabe 3 b)

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Hesse'sche Normalenform für E :

Mit $|\vec{n}| = \sqrt{2^2 + (-1)^2} = \sqrt{5}$ ergibt sich aus der Koordinatenform $E: 2x_1 - x_2 = 0$ nach Division durch die Länge des Normalenvektors die

$$\text{HNF } E: \frac{2x_1 - x_2}{\sqrt{5}} = 0$$
